משרד החינוך
המינהל הפדגוגי
האגף למחוננים ולמצטיינים

צביעת פאות בגרף על בסיס עץ

מתי ניתן להוסיף קשתות בין קודקודים של עץ מישורי ובכך ליצור מפה שאינה 3-צביעה בפאות?

חניך: ינאי סוקר, שמשית

מנחה-עמית: ד״ר אלי ברגר, אוניברסיטת חיפה

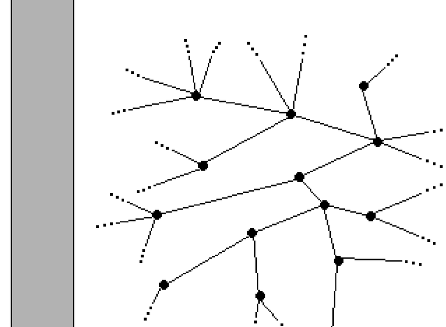
פרופ׳ רון אהרוני, הטכניון חיפה

מכון הנרייטה סאלד
המכון הארצי למחקר במדעי ההתנהגות

גרף מישורי הוא כל גרף שניתן לציירו במישור, באופן שכל קודקוד ייוצג ע״י נקודה במישור וכל צלע תיוצג ע״י קו המחבר שתיים מהנקודות הללו, מבלי שיווצר חיתוך בין קווים המייצגים צלעות מלבד החיתוך בקודקוד המשותף לשתי הצלעות. עץ הוא כל גרף קשיר – כלומר שמכל קודקוד בו קיים מסלול כלשהו לכל קודקוד אחר – אשר אין בו כלל מעגלים. לא קשה להראות שנובע משני התנאים הללו שבעץ קיים מסלול אחד ויחיד מכל קודקוד לכל קודקוד.

השאלה שאותה חקרנו היא: מתי ניתן להוסיף צלעות לעץ מישורי נתון, באופן שכל צלע תחבר בין שני קודקודים של העץ, כך שהגרף שיתקבל יהיה מישורי ובכך ליצור מפה שאת הפאות בה – כלומר את השטחים הנוצרים מבין הצלעות – לא ניתן לצבוע ב-3 צבעים מבלי ששני שטחים בעלי אותו הצבע ייגעו זה בזה (כלומר שיחלקו צלע משותפת)?

העצים שאנו דנים בהם כאן הם עצים אינסופיים שבהם לכל קודקוד דרגה 2 לפחות. אנו מתבוננים בציורים של העץ במישור ומניחים שאין קבוצה אינסופית של קודקודים שמתכנסת לנקודה. לעץ כזה נקרא עץ מתפרש.

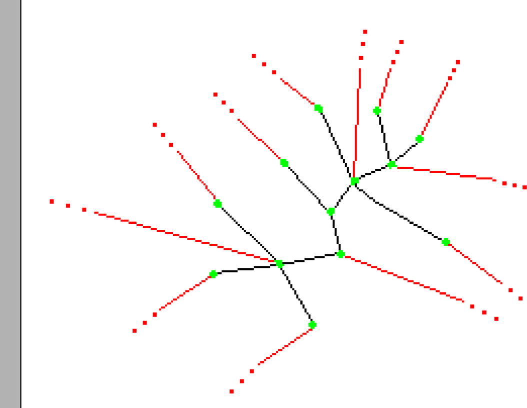


סרטוט א'

עץ מתפרש. ענפיו שואפים אל האינסוף, ודרגת כל קודקוד בו היא לפחות 2

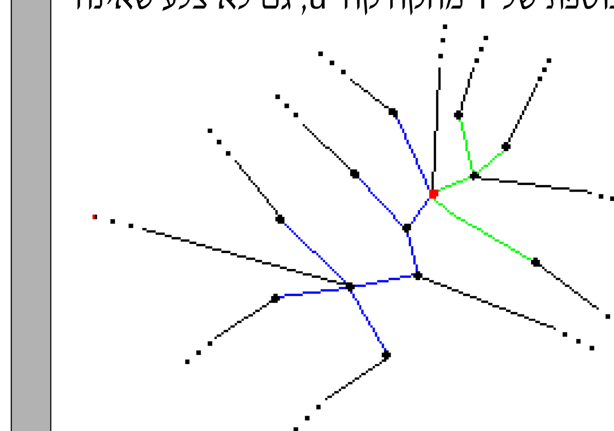
הגדרה:
יהי T עץ מתפרש ויהי U תת-עץ סופי של T. אומרים ש-U הוא תת-עץ פציל בסיסי של T אם
- מכל קודקוד ב-U יוצאת לכל היותר צלע אחת של T שאינה שייכת ל-U.

סרטוט ה'



מכל קודקוד (ירוק) בתת-הגרף הנתון (צלעותיו בשחור, קודקודיו בירוק) יוצאת לכל היותר צלע אחת (אדום) השייכת לעץ ושאינה שייכת לתת-הגרף הנתון.

- עבור כל קודקוד u של U ניתן לחלק את הענפים של U היוצאים מ-u לזוגות של ענפים סמוכים (או ענפים יחידים) כך שסכום הצלעות בכל זוג (או ענף יחיד) הנו זוגי. חלוקה זו תיקרא מעתה חלוקה זוגית. (כאן באומרנו ענפים סמוכים כוונתנו שנוכל, אם נרצה, להוסיף צלע ביניהם ולהשאיר את הגרף מישורי. פירוש הדבר הוא שלפחות באחת משתי הזוויות שבין שני הענפים הלו, לא יוצאת שום צלע נוספת של T מהקודקוד u, גם לא צלע שאינה שייכת ל- U).

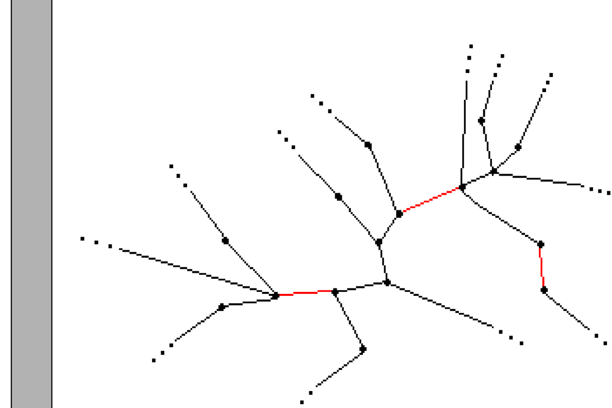


סרטוט ו'

בעבור כל קודקוד בתת-העץ הנתון (איחוד הצלעות הירוקות והכחולות, והקודקודים שבין שתי צלעות של תת-העץ לפחות) ניתן לחלק את ענפי תת-הגרף היוצאים ממנו לזוגות ענפים סמוכים (או ענפים יחידים) כך שסכום הצלעות בכל זוג הנו מספר זוגי. את הענפים היוצאים מהקודקוד המסומן בציור (באדום) ניתן לחלק לשני זוגות של ענפים (זוג אחד בכחול וזוג אחר בירוק) כך שמספר הצלעות באחד הזוגות הוא ארבע, ומספר הצלעות בזוג השני הוא שמונה.

נאמר ש- U הוא תת-גרף פציל אם ניתן ע״י כיווץ צלעות (כלומר: איחוד שני קודקודים סמוכים לקודקוד אחד) לקבל תת-גרף פציל בסיסי.

סרטוט ז'

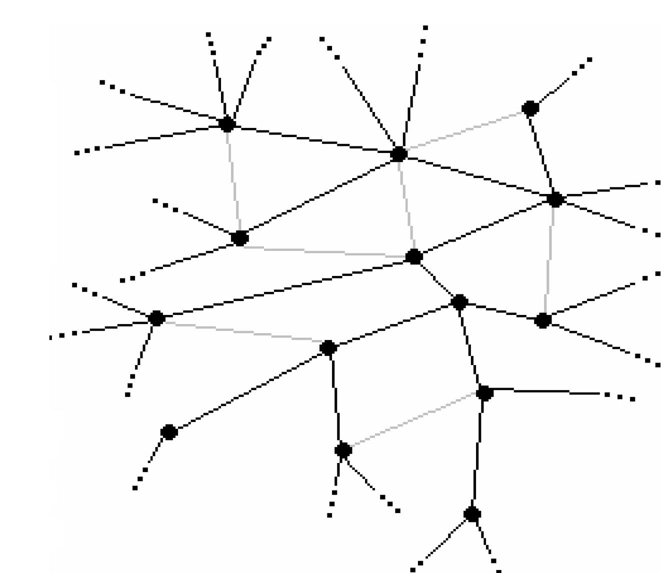


ניתן לכווץ צלעות בתת-העץ הנתון (הצלעות האדומות) וכך לקבל את תת-העץ המופיע בסרטוט ה' ובסרטוט ו', שהוא תת-עץ פציל בסיסי, ולכן תת-העץ הנתון הוא תת-עץ פציל.

השערתנו המרכזית במחקר זה היא שעץ מתפרש הוא מרבע אם ורק אם יש לו תת-גרף פציל.

לא הצלחנו להוכיח את כל ההשערה במלואה, אך הוכחנו חלקים נכבדים ממנה.

אפשר להוסיף לעץ צלעות בין קודקודים שלו וליצור מפה. את התחומים במפה אפשר לצבוע בצבעים, תוך הקפדה ששני תחומים הגובלים זה בזה יצבעו בצבעים שונים. במקרים מסוימים יספיקו שלושה צבעים ובמקרים אחרים יהיה צורך בארבעה צבעים.

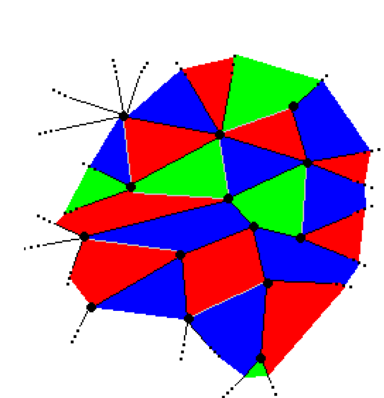


סרטוט ב'

העץ המתפרש המופיע בסרטוט א' לאחר שהוספו לו צלעות מבין הקודקודים הקיימים מבלי שצלע תחצה צלע אחרת בגרף שלאחר הוספת הצלעות או בעץ המקורי.

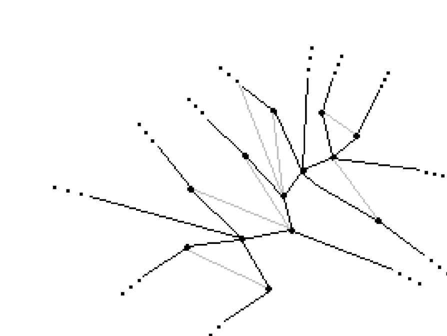
הגדרה:
לעץ מתפרש אשר ניתן להוסיף צלעות בין הקודקודים שלו וליצור מפה שאינה 3-צביעה בשטחים, נקרא עץ מרבע. לפעולת הוספת הצלעות נקרא ארבוע.

סרטוט ג'



צביעת השטחים בשלושה צבעים של הגרף המופיע בסרטוט ב'. לאחר כל הוספת צלעות לעץ המופיע בסרטוט א' יהיה ניתן לצבוע את שטחי הגרף המתקבל בשלושה צבעים, ולכן העץ אינו עץ מרבע.

סרטוט ד'



עץ מתפרש שהוספו לו צלעות כך שלא ניתן לצבוע את שטחי הגרף המתקבל בשלושה צבעים מבלי ששני שטחים בעלי צבע זהה ייגעו זה בזה. כיוון שהשלמה שכזו של העץ מתאפשרת, העץ הוא עץ מרבע.

קווים מרכזיים בהוכחה

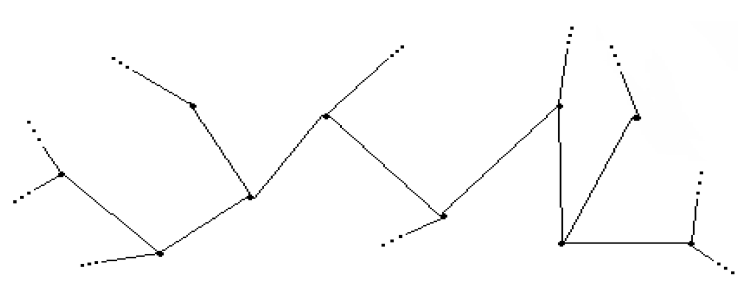
הוכחת ההשערה בעבור עץ שדרגת הקודקודים המקסימלית בו היא 3.

ההישג הראשון במחקר היה הוכחת ההשערה במלואה בעבור עץ שדרגת הקודקודים המקסימלית בו היא 3. דרגת כל קודקוד בעץ היא או 2 או 3, והעץ מתפרש על פני המישור האינסופי. במקרה שכזה, ניתן להראות שכל תת-עץ פציל מכיל תת-עץ פציל בסיסי. כמו כן קיומו של תת-עץ פציל שקול לקיומם של שני קודקודים שדרגתם 2 והמרחק ביניהם הוא זוגי. נשים לב שאם יש יותר משני קודקודים בדרגה 2, אז בהכרח יש שניים מתוכם שהמרחק ביניהם הוא זוגי. ולכן כדי להוכיח את הכרחיות התנאי בעבור קבוצת העצים הזו, יש להוכיח שעץ שבו לכל היותר קודקוד אחד שדרגתו 2 אינו מרבע, וכן שעץ עם בדיוק שני קודקודים מדרגה 2 שהמרחק ביניהם הוא אי-זוגי, אינו עץ-מרבע. על מנת להוכיח שהתנאי מספיק, יש להוכיח שאם יש בעץ שני קודקודים מדרגה 2 שהמרחק ביניהם הוא זוגי, אזי העץ הוא מרבע.

סרטוט ח'

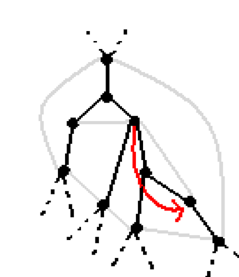
עץ מתפרש שדרגתו המקסימלית היא 3.

כל קודקוד בעץ מהווה מפגש של שתיים או שלוש צלעות..



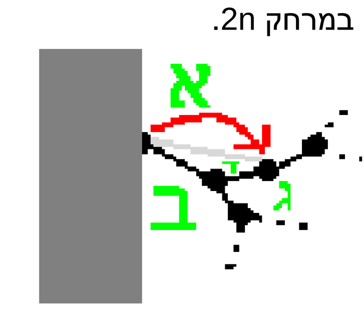
אם

על-מנת להוכיח שהתנאי מספיק, התבוננו בשני קודקודים x,y מדרגה 2, שהמרחק ביניהם הוא זוגי. ההוכחה נעשתה באינדוקציה על המרחק בין x ל-y. נבדק תחילה המקרה בו המרחק בין x ל-y הוא 2, ונתגלה שניתן לבנות ארבוע. לאחר מכן הוצע אלגוריתם פשוט המאפשר ליצור ארבוע של עץ עם שני קודקודים בדרגה 2 במרחק 2n+2 מתוך ארבוע של גרף עם שני קודקודים בדרגה 2 במרחק 2n.



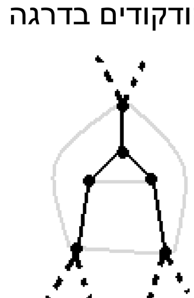
סרטוט י"א

יישום האלגוריתם על המעבר מהעץ המינימאלי לעץ שהמרחק בין שני קודקודיו הזוגיים הוא ארבע.



סרטוט י'

אלגוריתם לארבוע עץ שהמרחק בין שני קודקודיו הזוגיים גדול ב-2 מהמרחק בין שני קודקודים זוגיים בעץ בעל ארבוע.



סרטוט ט'

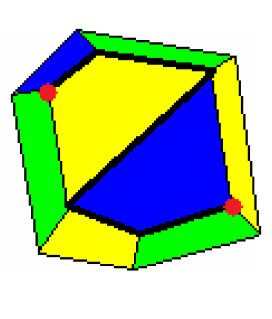
ארבוע העץ המינימלי.

רק אם

הנחנו שקיים ארבוע והבטנו על המפה האינסופית המתקבלת מהארבוע, שאינה ניתנת לצביעה בשלושה צבעים. לפאות החיצוניות במפה שמצאנו קראנו פאות מעטפת (מספיק שקודקוד אחד התוחם את הפאה נוגע ב״רקע״, כלומר בפאה שאינה ב-M, בכדי שהפאה תיחשב לחיצונית). לפאות ב-M שאינן פאות מעטפת קראנו פאות-תוכן. לצלע התוחמת פאת מעטפת ב-M, אך איננה תוחמת פאת תוכן קראנו צלע בריחה, והראינו שאם x קודקוד שכל הפאות בהן הוא נמצא שייכות ל-M, אזי לכל היותר צלע אחת היוצאת מ-X היא צלע בריחה. לאחר מכן הבטנו על קודקוד כלשהו y בתוך M, והגדרנו את U להיות תת-העץ הגדול ביותר של T שאינו מכיל צלעות בריחה. מהדיון לעיל נובע שהעלים של U הם הקודקודים מדרגה 2 ב-T. אם ל-U שלושה עלים או יותר, יש מהם שניים שהמרחק ביניהם זוגי ובזאת מסתיימת ההוכחה.
אם יש ל-U רק שני עלים, עלינו להוכיח שהמרחק ביניהם הוא זוגי. במקרה זה קל לנתח את צורת המפה M ולהראות שאם המרחק בין העלים של U הוא אי-זוגי אזי אפשר לצבוע בשלושה צבעים את כל פאות M.

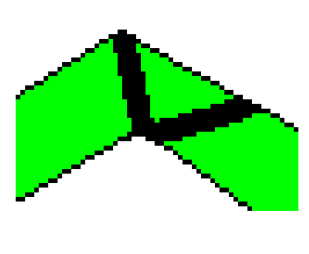
סרטוט י"ד

אם המרחק בין שני הקודקודים הוא אי-זוגי, ניתן לצבוע את המפה בשלושה צבעים ע"י כך שצובעים תחילה את צורות התוכן כנדרש – מה שאפשרי לפי הנחת המינימליות – ולאחר מכן את המעטפת.



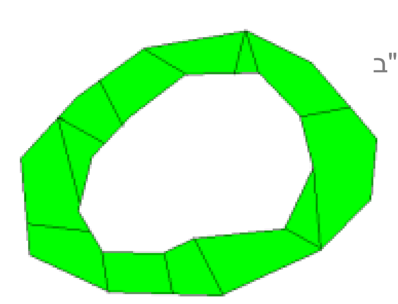
סרטוט י"ג

מהקודקוד הנתון יוצאות שתי צלעות בריחות המחלקות את המפה לשתי מפות הגבולות זו בזו דרך שתי צלעות (במקרה זה אחת המפות היא צורה בודדה). לא קשה להראות שבמבנה זה, אם הגרף הוא מרבע, לפחות אחת משתי המפות אינה יעילה לארבוע, ולכן המפה המאוחדת אינה מינימלית



סרטוט י"ב

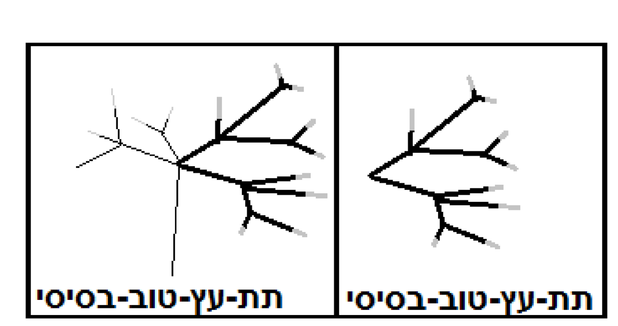
מעטפת



הוכחת ההשערה בעבור המקרה הכללי

אם

גם את צד ה״אם״ בעבור המקרה הכללי הצלחנו להוכיח במלואו. ההוכחה נעשתה גם היא על ידי אינדוקציה, שבסיסה הוא תת-עץ שדרגת כל קודקודיו היא 2 או 3. צעד האינדוקציה מתבסס על כך שניתן לפרק כל תת-עץ פציל בסיסי לזוגות סמוכים של ענפים כשסכום הצלעות בכל זוג הוא זוגי. ניתן להראות שאם תת-הגרף כולו הוא פציל בסיסי, אזי גם כל זוג בחלוקה הזוגית של קודקוד מסוים uמהווה תת-עץ פציל בסיסי, אם רק נתעלם מהקודקוד u עצמו, שממנו יכולים להיות מושרשים ענפים רבים שאינם שייכים לאותו זוג הענפים. מכאן נובע, לפי הנחת האינדוקציה, שכל זוג ענפים שכזה, כיוון שהוא תת-עץ פציל, מהווה חלק מעץ-מרבע. בצורה זו אנו מקבלים קבוצה של ארבועים שונים המתייחסים לתת-גרפים של T, וכל שנותר הוא להציע אלגוריתם שיאחד את הארבועים הללו ליצירת ארבוע של T. אכן מצאנו את אותו האלגוריתם. לאחר מכן, מנכונות הטענה בעבור תת-עץ פציל בסיסי, ניתן בקלות להוכיח אותה בעבור כל תת-עץ פציל, כשנראה שכיווץ צלעות לא יוצר מגבלה חדשה בצביעת המפה, ולכן אם לאחר הכיווץ נוכל לבנות מפה שאינה 3-צביעה, נוכל מתוך הארבוע של העץ המכווץ, ליצור ארבוע של העץ המקורי.



סרטוט ט"ו

מהתנאי השני בהגדרת תת-עץ פציל בסיסי נובע שכל תת-עץ שכזה מורכב מתתי-עץ פצילים מינימאליים יותר, המחוברים זה לזה (החיבור מונע מכל אחד מהם להיות פציל בסיסי בפני עצמו במצב הנתון). לכן, לפי הנחת האינדוקציה כל זוג שכזה ניתן לארבוע, וניתן להוכיח שאיחוד הארבועים של כולם יוצר ארבוע של תת-העץ הגדול אליו הם שייכים.

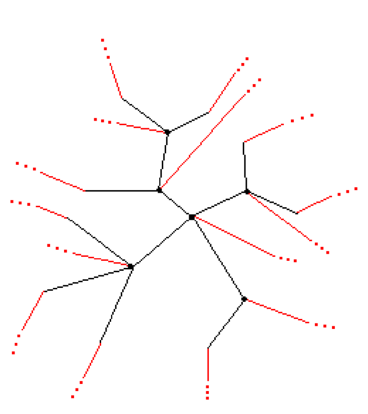
רק אם

באותה הדרך בה הוכחנו את התנאי בעבור עץ שדרגת הקודקוד המקסימלית בו היא 3, הוכחנו שוב בעבור עץ כללי Tשאם הוא עץ מרבע, קיים בו תת-עץ Uשמכל קודקוד בו יוצאת לכל היותר צלע אחת שלא שייכת לתת-העץ. זה אומר, בין השאר, שלכל עלה ב- Uדרגה 2 ב- T.

מה שנשאר הוא להוכיח ש- Uמקיים את תנאי (2) בהגרת תת-עץ פציל, או שניתן להגיע ממנו על ידי כיווץ צלעות לעץ המקיים תנאי זה, מבלי לפגוע בתכונה (1). על פניו, לא נראה היה שהמשפט יהיה מורכב מדי להוכחה. אבל החלק הזה נתגלה כמורכב יותר מכל מה שגילינו עד אליו ביחד.

בהתחלה הוכחנו את המשפט במלואו במקרה שתנאי (1) מתקיים בצורה מלאה, כלומר, מכל קודקוד ב- Uיוצאת בדיוק צלע אחת ב- Tשאינה שייכת ל-U. במילים אחרות: לאחר שהראינו שבכל עץ-מרבע קיים תת-גרף שמכל קודקוד בו יוצאת צלע אחת לכל היותר שאינה שייכת לאותו תת-גרף, הוכחנו שאם באותו תת-גרף יוצאת בדיוק צלע אחת מכל קודקוד שאינה שייכת לתת-הגרף, אז תת-הגרף הזה גם פציל, ואפילו פציל בסיסי.

בשלב הבא ניסינו להוכיח את הכרחיות התנאי גם בעבור המקרה הכללי. ניסינו להוכיח את הטענה בשיטה הבאה: ניצלנו את העובדה שהמשפט מוכח בעבור עץ שדרגת הקודקוד המקסימלית בו היא 3, הנחנו שקיים עץ שאינו עונה על ההשערה, ויכולנו להניח שקיים בו קודקוד שדרגתו גבוהה מ-3. יכולנו גם להניח שהקודקוד נמצא בתוך המפה המינימלית הסופית שאינה ניתנת לצביעה, ולא מחוץ למפה בהמשך אחד מענפי העץ. זאת מפני שאם נניח שדרגת כל הקודקודים במפה המינימלית שאינה ניתנת לצביעה היא 2 או 3, נוכל להוכיח שקיים מסלול זוגי בין שני קודקודים שדרגתם 2 העובר רק דרך קודקודים שדרגתם 2 או 3, ולכן קיים תת-עץ-פציל במפה. כעת בחרנו קודקוד אקראי במפה, והסתכלנו על הקודקוד-שדרגתו-גבוהה-מ-3 הרחוק ביותר מאותו קודקוד אקראי. הראינו שמהטענה שהוא הרחוק ביותר, כלומר שבהמשכו אין עוד קודקודים שדרגתם גבוהה מ-3, ומההנחה שזה המקרה המינימלי שלא עונה על ההשערה, אנחנו מגיעים למסקנה שמספר המבנים האפשריים לאחר אותו קודקוד הוא סופי, איתרנו את אותם המבנים, והוכחנו בעבור כל מבנה שכזה שהוא לא יכול להופיע במפה מינימלית שלא עונה על ההשערה. כשנתקלנו במבנים שלא הצלחנו להפריך, הלכנו קודקוד אחד אחורה (ולפעמים אף יותר), והראינו שבמבט רחב יותר, אם ניקח בחשבון את המבנים בהם הוא יכול להופיע, ניתן להפריך את הימצאותו במפה. כך הראינו בעבור כל מבנה שהוא לא יכול להופיע במפה מינימלית שלא עונה על ההשערה (או שהופעתו גוררת את הופעתו של המבנה אותו לא הצלחנו להפריך), למעט מבנה אחד ספציפי אותו לא הצלחנו להפריך, והוא משאיר את ההשערה בגדר השערה בלבד. אם נוכיח שהוא לא יכול להופיע במפה מינימלית שלא עונה על ההשערה – נסיים להוכיח את ההשערה.
אוסיף שהוכחנו את הטענה גם בעבור עץ מתפרש שכל הקודקודים בו לכל היותר בדרגה 3, למעט אחד שדרגתו בלתי מוגבלת.



סרטוט ט"ז

בתת העץ הנתון מכל קודקוד יוצאת בדיוק צלע אחת השייכת לעץ המתפרש ושאינה שייכת לתת-העץ (צלעות אלו מודגשות באדום), והעץ לו הוא שייך הנו עץ מרבע. לכן, בהנחה והוא תת-העץ היחיד בגרף הנתון העונה על התנאי הראשון של הפצילות, הוא בהכרח גם עונה על התנאי השני.